

Materialtheorie am Beispiel eines Elastomerwerkstoffs

Peter Haupt

Universität Kassel

Abstract:

The object of the theory of materials is the mathematical modelling of the material behaviour on the basis of general principles and systematic methods. To this end, experiments have to be performed on appropriate specimen. Before constructing a constitutive model, the experimental data can be classified from general points of view. Four possibilities are distinguished: the observed material behaviour may be

- *rate-independent without hysteresis*
- *rate-independent with hysteresis*
- *rate-dependent without equilibrium hysteresis*
- *rate-dependent with equilibrium hysteresis.*

In the context of material modelling these categories correspond to 4 different theories of material behaviour, namely

- *Elasticity*
- *Plasticity*
- *Viscoelasticity*
- *Viscoplasticity.*

In this contribution the properties of cylindrical specimen made of black-filled rubber are investigated. Experiments of tension, torsion and combinations of tension and torsion are carried out. The data suggest rate-dependence and a very small equilibrium hysteresis which can be neglected. Thus, a material model of nonlinear viscoelasticity is designed on the basis of a rheological model, consisting of nonlinear spring and damping elements. In particular, process-dependent viscosities are introduced. This leads to the possibility to represent nonlinear rate-dependence and the influence of the deformation process on the relaxation during a subsequent hold time. Numerical simulations on the basis of identified material parameters illustrate the physical significance of the constitutive equations.

Keywords: Elastomer, Rubber, Viscoelasticity, Theory of Materials

1 Was ist Materialtheorie?

Die Bilanzrelationen der Kontinuumsmechanik enthalten mehr Unbekannte als Gleichungen zur Verfügung stehen, das heißt: Zusätzliche Beziehungen zwischen den unbekanntem Feldern werden benötigt. Diese sollen die individuellen stofflichen Eigenschaften der materiellen Körper darstellen und werden daher *Materialgleichungen* genannt.

Die Bilanzrelationen der Kontinuumsmechanik (für Impuls, Drehimpuls, Energie, Entropie) repräsentieren Naturgesetze und werden in diesem Sinne als ausnahmslos gültig angesehen. Demgegenüber sind die Materialgleichungen keine Gesetze, sondern „nur“ Modelle, die das individuelle Verhalten einzelner Werkstoffe in idealisierter Form darstellen.

Die klassischen Fachgebiete der Fluid und Festkörpermechanik sind durch unterschiedliche Materialgleichungen definiert, die das sehr unterschiedliche Verhalten von Flüssigkeiten, Gasen und Festkörpern jeweils in wesentlichen Grundzügen darstellen. Die klassischen Materialgleichungen bilden die Grundlage der Technischen Mechanik und führen in weiten Bereichen zu einer guten und nützlichen Beschreibung der Realität. Allerdings erweisen sich die Annahmen der Technischen Mechanik für manche Situation als viel zu eng, da die Wirklichkeit allemal komplizierter ist als jede einfache Theorie. Die allzu simplen klassischen Materialmodelle (Lineare Elastizität, Ideale Plastizität, Lineare Viskosität und Viskoelastizität) müssen dann durch geeignete Hypothesen erweitert werden. Ist das Materialtheorie? Noch nicht, denn: Zur Theorie gehört die systematische Struktur und die logische Konsistenz.

Gegenstand der *Materialtheorie* im Rahmen der Kontinuumsmechanik ist die Modellierung des stofflichen Verhaltens von materiellen Körpern. Die Materialtheorie formuliert klare Annahmen und zieht daraus unter Beachtung der Logik und der Naturgesetze Folgerungen. Die idealisierende Darstellung der Materialeigenschaften erfaßt nicht alles was experimentell beobachtbar ist; das darf sie auch gar nicht, weil sie sonst unbrauchbar wäre: Sie beschreibt das Materialverhalten in wesentlichen Merkmalen. Die Entscheidung, welche Merkmale im einzelnen als wesentlich anzusehen sind, ist willkürlich und fällt im Zusammenhang mit den zur Verfügung stehenden experimentellen Daten und im Hinblick auf den Zweck der beabsichtigten Anwendung.

Das Ziel der Materialtheorie ist die Bereitstellung eines systematisch geordneten Spektrums von Möglichkeiten zu einer physikalisch und mathematisch einwandfreien Materialbeschreibung. Am Anfang dieses Spektrums steht die allergrößte Materialmodellierung, die fast nichts aussagt, etwa der Hooke'sche Körper oder das Newtonsche Fluid. Am offenen Ende stünde eine beliebig detaillierte Modellbildung, deren Verfeinerung nie abgeschlossen wäre.

2 Experimentelle Beobachtungen

Ein Materialmodell ist eine Relation zwischen Verzerrungsprozessen und Spannungsprozessen. Die physikalische Aussage eines Materialmodells soll experimentelle Beobachtungen wiedergeben. Daraus ergibt sich für die Mechanik bereits vor jeder Modellierung ein grundsätzliches Problem: Steuern und messen lassen sich nur Verschiebungen und resultierende Kräfte, jedoch keine Verzerrungen und Spannungen. Das bedeutet: Von der vieldimensionalen tensoriellen Welt der Kontinuumsmechanik kann man durch Versuche nur ein höchst unvollständiges Abbild wirklich beobachten. Dieses Bild ist in der Regel nur eindimensional oder höchstens zweidimensional; vielleicht in Ausnahmefällen dreidimensional.

Man behilft sich üblicherweise mit Versuchsanordnungen, die es erlauben, aus der Messung von Verschiebungen und Kräften direkt auf Verzerrungen und Spannungen zu schließen. Das setzt Probekörper mit homogenen Eigenschaften und einfacher Geometrie voraus: Zugstäbe mit konstantem Querschnitt (Zug/Druck) oder dünnwandige Rohre (Zug/Druck/Torsion). Die experimentellen Möglichkeiten sind in diesem Zusammenhang eingeschränkt auf langsame Prozesse und kleine Verformungen.

Experimente an Probekörpern komplizierter Geometrie, in denen inhomogene Spannungsverteilungen, Verzerrungszustände und Temperaturfelder vorliegen, bieten in Einzelfällen Möglichkeiten, diesen engen experimentellen Horizont zu erweitern. Die Auswertung der experimentellen Daten mit dem Ziel einer Identifikation der eigentlichen Materialeigenschaften kann dann allerdings sehr aufwendig sein und enthält noch viele offene Fragen.

Durch eine rein qualitative Deutung einiger grundlegender Experimente (bei jeweils konstanter Temperatur) kann man sich vor jeder Modellbildung im Hinblick auf das Materialverhalten eine Orientierung verschaffen. Das kann folgendermaßen gehen:

Man prüft das zu untersuchende Objekt zuerst daraufhin, ob die Systemantwort von der Geschwindigkeit des Eingangsprozesses (Verschiebungssteuerung, Kraftsteuerung) abhängt. Ist keine nennenswerte Geschwindigkeitsabhängigkeit feststellbar, so wäre die nächste Frage, ob zyklische Prozesse mit Hystereseeffekten verbunden sind.

Zwei weitere Alternativen entstehen, wenn die Systemantwort deutlich von der Geschwindigkeit des Eingangsprozesses abhängt. In diesem Fall liefert die Gleichgewichtskennlinie das Kriterium. Eine Gleichgewichtskennlinie entsteht aus einer Folge von Haltezeiten mit Relaxationsprozessen, deren Abbruchpunkte näherungsweise Gleichgewichtszuständen entsprechen. Zu unterscheiden sind jetzt die beiden Möglichkeiten, ob die Gleichgewichtskennlinie eine Hysterese aufweist oder nicht.

Diese 4 Möglichkeiten (Geschwindigkeitsunabhängigkeit ohne oder mit Hysterese bzw. Geschwindigkeitsabhängigkeit ohne oder mit Gleichgewichtshysterese) erlauben unter dem Gesichtspunkt der Beschränkung auf das Wesentliche eine Einordnung der experimentellen Daten.

Was sagt die Modellbildung, die Materialtheorie dazu? Die Vielfalt des experimentell sichtbaren Materialverhaltens kann man qualitativ, wie erklärt, in 4 Kategorien einordnen. Diese 4 Kategorien motivieren genau 4 Materialtheorien:

Das geschwindigkeitsunabhängige Materialverhalten ohne Hysterese wird durch die Theorie der *Elastizität* dargestellt, geschwindigkeitsunabhängiges Verhalten mit Hysterese durch die Theorie der *Plastizität*.

Geschwindigkeitsabhängiges Materialverhalten ohne Gleichgewichtshysterese entspricht der Theorie der *Viskoelastizität*. Das geschwindigkeitsabhängige Materialverhalten mit Gleichgewichtshysterese definiert den allgemeinsten Fall, die *Viskoplastizität*. Alle speziellen Materialmodelle aus diesen 4 Theorieklassen sind grundsätzlich nichtlinear. Die Nichtlinearitäten resultieren aus dem physikalischen Verhalten und bei großen Verformungen auch aus der Geometrie.

Die 4 Theorieklassen verbindet man auch mit verschiedenartig ausgeprägten Gedächtniseigenschaften eines materiellen Körpers an seine thermomechanische Vorgeschichte: Ein elastisches Material besitzt kein Gedächtnis (lediglich eine Erinnerung an seinen Ausgangszustand). Ein viskoelastisches Material ist durch nachlassende Gedächtniseigenschaften gekennzeichnet. Die Plastizität entspricht einem perfekten Materialgedächtnis, und ein viskoplastischer Körper ist durch teils perfekte und teils nachlassende Gedächtniseigenschaften gekennzeichnet.

Wenn man einen bestimmten Werkstoff durch eine Serie von Experimenten untersucht hat, und wenn sich herausstellt, daß die experimentellen Daten durch ein in geeigneter Weise konstruiertes Materialmodell dargestellt werden können, so stellt sich die Aufgabe, die Parameter, die in den konstitutiven Gleichungen enthalten sind, und die somit im Sinne des gewählten Modells die Materialeigenschaften quantitativ darstellen, zu identifizieren, d.h. so zu bestimmen, daß alle experimentellen Daten, die zur Verfügung stehen, durch das Materialmodell hinreichend gut wiedergegeben werden. Diese Identifikation erfolgt im einfachsten Fall direkt unter Ausnutzung der jeweiligen physikalischen Bedeutung der Materialkonstanten, oder im allgemeinen Fall durch die Anwendung von Optimierungsverfahren.

3 Zug- und Torsionsversuche an einem Elastomerwerkstoff

Im folgenden soll die Konzeption eines Materialmodells aufgrund von experimentellen Daten als ein Beispiel für die Anwendung der allgemeinen Materialtheorie erklärt werden. Das Forschungsprojekt, das diesem Beispiel zugrunde liegt, wurde von K. Sedlan im Rahmen des DFG-Graduiertenkollegs „Identifikation von Material- und Systemeigenschaften“ in Kassel durchgeführt [1]. Eine eingehende Darstellung der Ergebnisse dieses Projektes mit ausführlichen Literaturangaben findet sich in [2].

Die Probekörper, die von der Continental AG zur Verfügung gestellt wurden, bestehen aus einem Material, das zur Herstellung von Reifen verwendet wird. Das untersuchte Elastomer ist ein rußgefüllter Gummi, der in sehr guter Näherung als inkompressibel und isotrop angesehen werden kann. Im Fall der Inkompressibilität und Isotropie ist es möglich, den Versuchen eine spezielle inhomogene Deformation zugrunde zu legen, nämlich die Deformation „Torsion und Zug eines kreisförmigen Vollzylinders“. Bild 1 skizziert den Probekörper. Bei Verschiebung und Drehung der Einspannhülsen entsteht im mittleren Teil des Probekörpers ein inhomogener Deformationszustand, der in Bild 2 beschrieben ist.

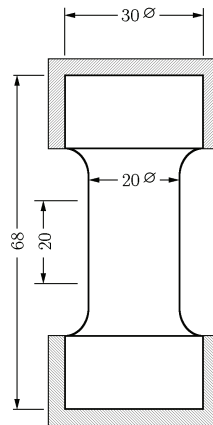
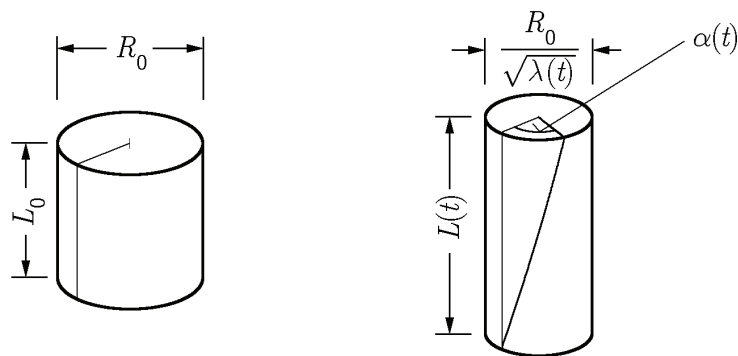


Bild 1: Probekörper



Streckung (Stretch) $\lambda(t) = \frac{L(t)}{L_0}$

Drillung (Twist) $D(t) = \frac{\alpha(t)}{L_0}$

Deformation $(R, \Phi, Z) \mapsto r = \frac{R}{\sqrt{\lambda(t)}}, \quad \varphi = \Phi + D(t)Z, \quad z = \lambda(t)Z$

Deformationsgradient $\mathbf{F}(x, t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda(t)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda(t)}} & Dr \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Bild 2: Zug und Torsion eines Kreiszyinders; Deformationszustand

Der Deformationsgradient (hier dargestellt in bezug auf Zylinderkoordinaten) repräsentiert unter der Voraussetzung InkompRESSIBILITÄT und ISOTROPIE eine sogenannte UNIVERSALE DEFORMATION, das heißt, für beliebiges Materialverhalten und beliebig große (langsam verlaufende) Deformationen liegt hiermit eine exakte Lösung der Grundgleichungen der Mechanik vor. Daher kann man sicher sein, daß bei beliebigen axialen Verschiebungen und Drehungen der Endflächen die angegebene inhomogene Deformation, unabhängig von speziellen Materialeigenschaften auch wirklich stattfindet: Die Deformation ist daher dazu geeignet, die vor dem Versuch unbekanntenen Materialeigenschaften zu ermitteln.

Vor der eigentlichen Versuchsdurchführung wurden die Materialproben einem zyklischen Dehnungsprozeß unterworfen, gefolgt von einem längeren Relaxationsprozeß bei Dehnung Null. Dieser Vorprozeß hatte das Ziel, den Mullinseffekt zu eliminieren, dessen Modellierung nicht Gegenstand des Forschungsprojektes sein sollte. In den folgenden Bildern sind einige Versuchsergebnisse dargestellt.

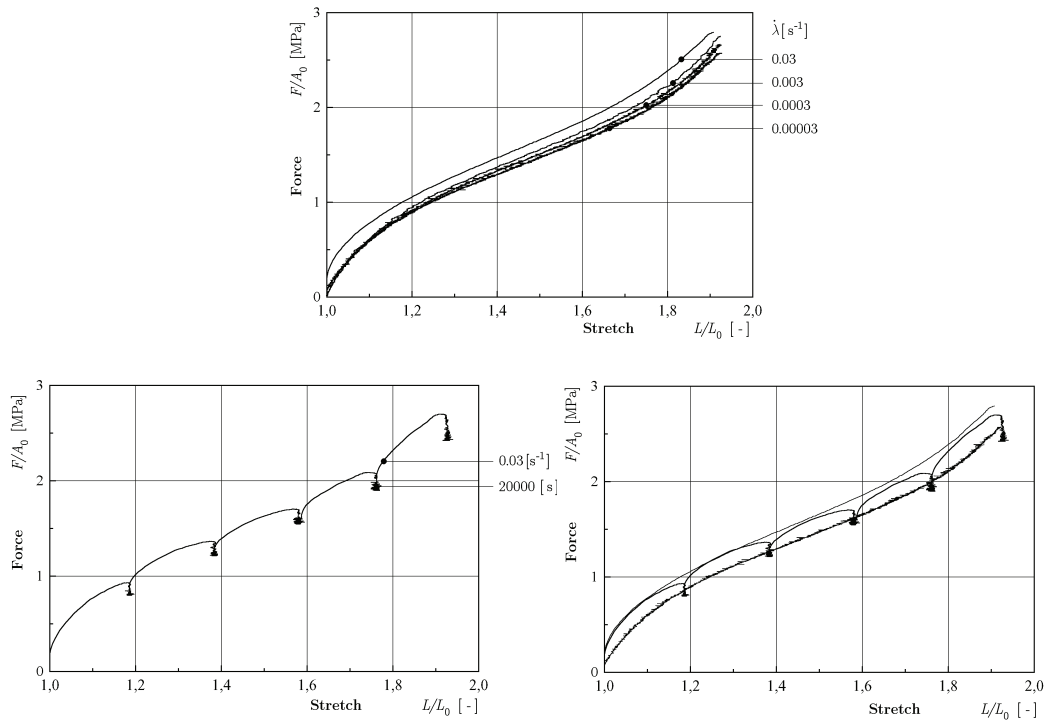


Bild 3: Monotoner Zug: Geschwindigkeitsabhängigkeit und Relaxation

In Bild 3 ist eine Serie von Zugversuchen wiedergegeben. In den monotonen Versuchen – im oberen Teil des Bildes – wurde die Dehnungsgeschwindigkeit jeweils konstant gehalten und über mehrere Größenordnungen hinweg variiert. Eine Geschwindigkeitsabhängigkeit ist deutlich sichtbar. Eingefügte Haltezeiten von 20000 s führten zu Relaxationsvorgängen (Bild 3 unten), wobei bemerkenswert ist, daß die Spannungswerte in den Relaxations-Abbruchpunkten unterhalb der Spannungs-Dehnungs Kurve liegen, die zu der kleinsten Dehnungsgeschwindigkeit gehört. Die Relaxation hängt außerdem von dem Verlauf des Prozesses ab, der der Haltezeit vorausgeht. Das zeigt Bild 4: Eine z.B. zyklische Vorbelastung führt zu einer schnelleren Relaxation, die auf einem niedrigeren Gleichgewichtswert endet.

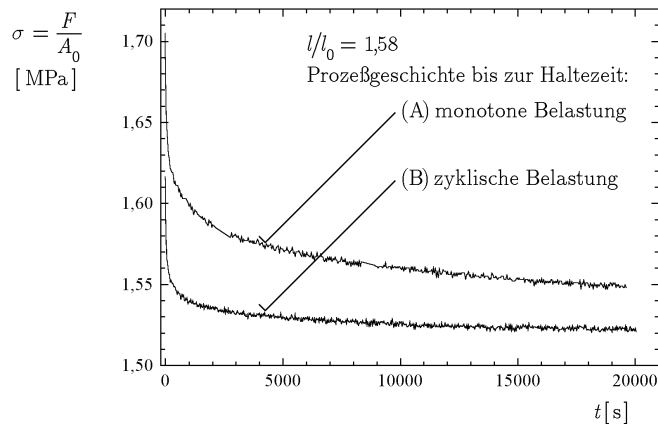


Bild 4: Prozeßabhängigkeit des Relaxationsverhaltens

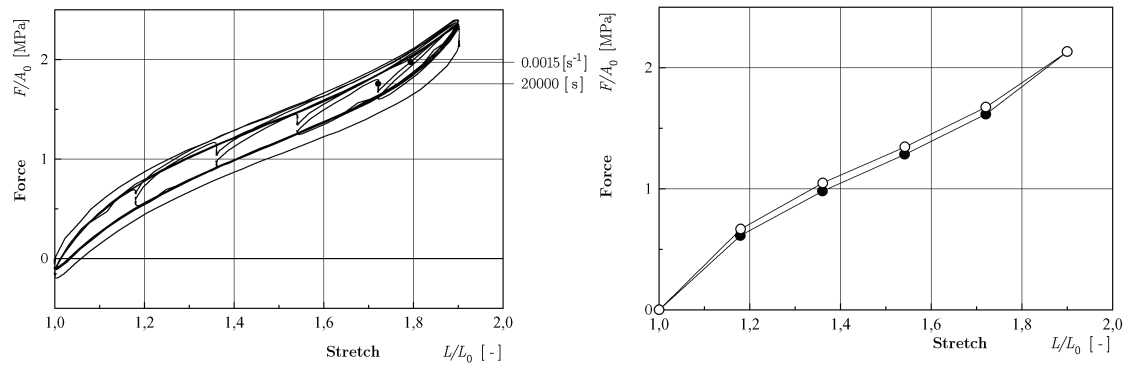


Bild 5: Zyklischer Relaxationsversuch und Gleichgewichtskennlinie

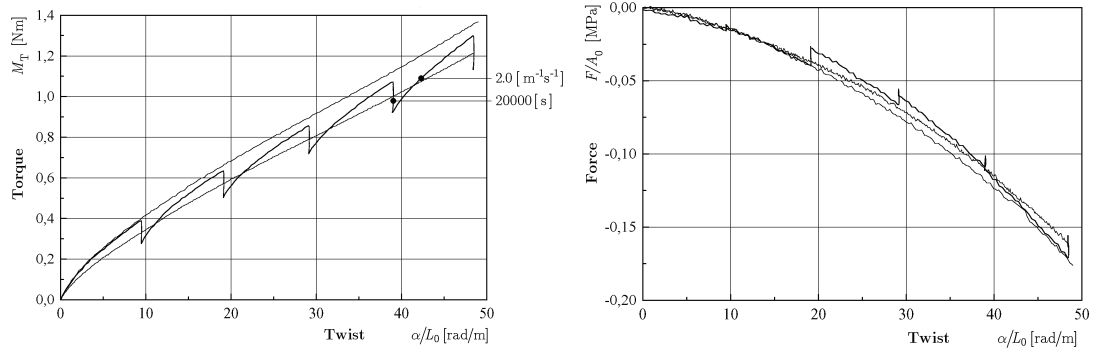


Bild 6: Torsionsversuche; Geschwindigkeitsabhängigkeit, Relaxation und Normalspannungseffekt

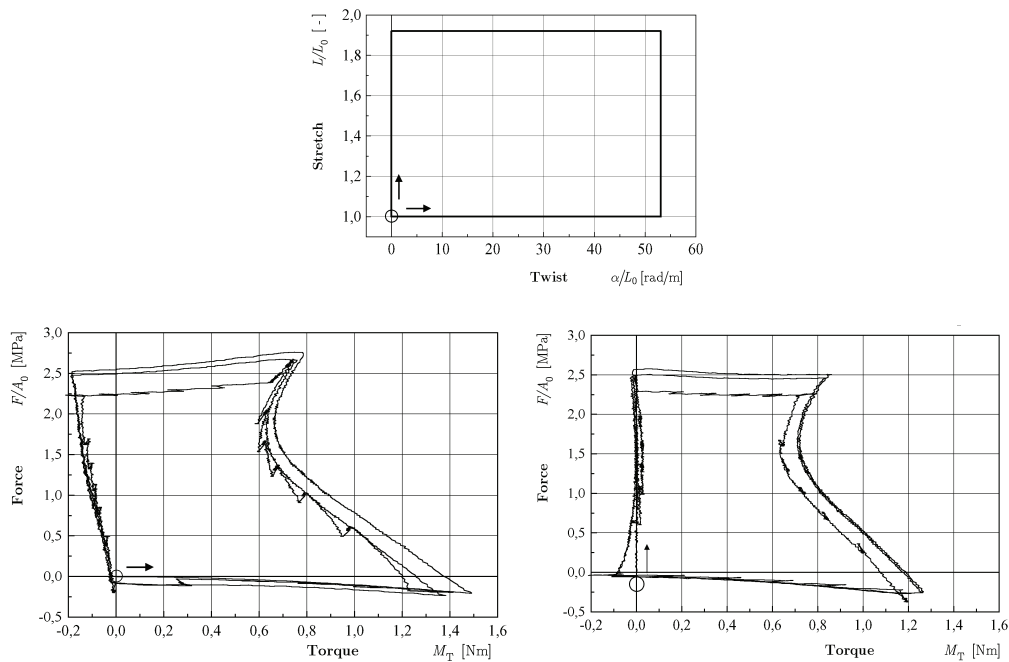


Bild 7: Zug und Torsion: Rechteckweg

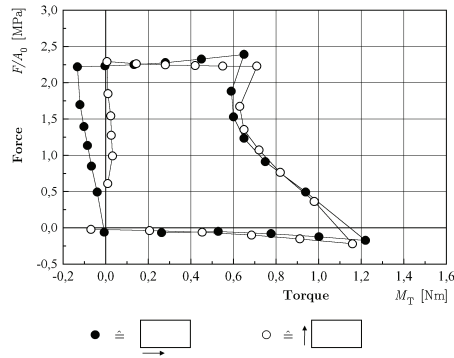


Bild 8: Rechteckweg: Gleichgewichtspunkte

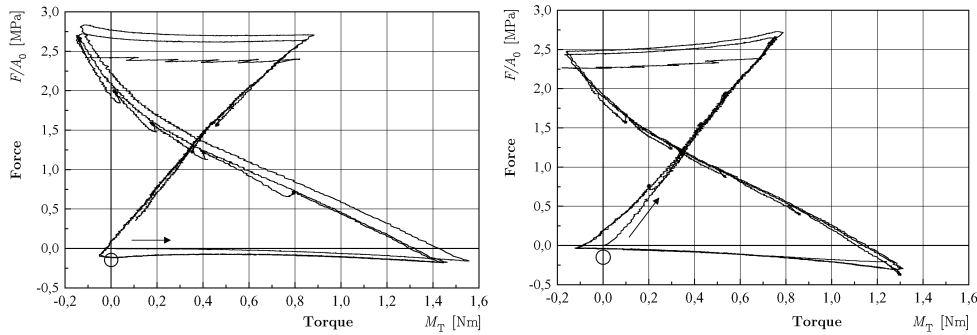
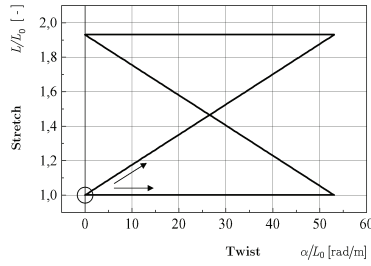


Bild 9: Zug und Torsion: Hourglass-Weg

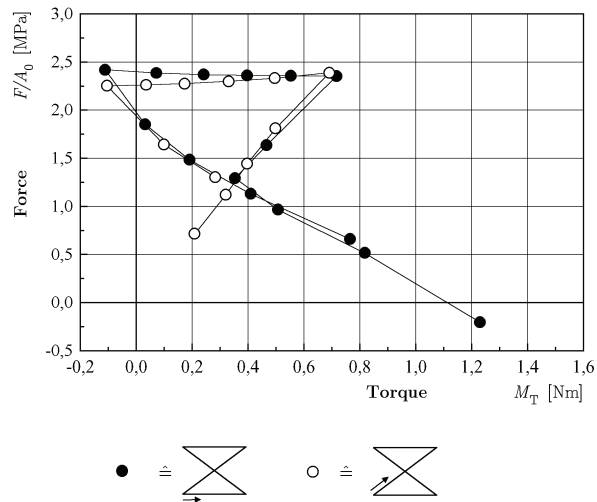


Bild 10: Hourglass-Weg: Gleichgewichtspunkte

Bild 5 zeigt die Materialantwort auf einen zyklischen Relaxationsversuch; dabei wurden vor den Haltezeiten weitere Deformationsprozesse eingefügt, die zu einer besseren Annäherung der Relaxations-Abbruchpunkte an Gleichgewichtspunkte führen (s. Bild 4). Die Relaxations-Abbruchpunkte sind im rechten Teil von Bild 5 herausgezeichnet; Ihre Verbindung ist (näherungsweise) identisch mit der

Gleichgewichtskennlinie. Die Gleichgewichtskennlinie nach Bild 5 weist nur eine sehr kleine Hysterese auf.

Geschwindigkeitsabhängigkeit und Relaxation treten in derselben Weise auch in Torsionsexperimenten auf. Das zeigt Bild 6, wo die mit der Scherdeformation zusammenhängenden Normalspannungseffekte ebenfalls wiedergegeben sind.

Bild 7 zeigt die Materialantwort auf einen verschiebungsgesteuerten zweidimensionalen zyklischen Prozeß mit Haltezeiten im letzten Zyklus: Der Deformationsweg in der Drillung-Streckung Ebene ist ein Rechteck, das in beiden Richtungen durchlaufen wurde. Während der Haltezeiten im letzten Zyklus finden zweidimensionale Relaxationsprozesse statt. Die entsprechenden Gleichgewichtspunkte sind im Bild 8 wiedergegeben. Analog wird in Bild 9 ein Hourglass-Weg untersucht. Die entsprechenden Gleichgewichtspunkte zeigt Bild 10.

4 Materialmodellierung: Eindimensionale Formulierung

Die gezeigten experimentellen Daten belegen eindeutig eine Geschwindigkeitsabhängigkeit des Materialverhaltens in Verbindung mit einer Gleichgewichtshysterese, die so schwach ausgeprägt ist, daß sie bei der Modellierung unberücksichtigt bleiben kann. Das motiviert die Konstruktion eines Materialmodells der nichtlinearen Viskoelastizität, das geeignet ist, die Versuchsdaten wiederzugeben. Die Nichtlinearität des Materialmodells ist zwingend erforderlich, weil alle Kennlinien nichtlinear sind und weil das Materialmodell für große Deformationen gültig sein soll. Unmittelbar klar ist auch, daß ein Relaxationsverhalten, wie es in Bild 4 wiedergegeben ist, durch die klassische lineare Viskoelastizitätstheorie prinzipiell nicht dargestellt werden kann. Um die physikalischen Inhalte klar herauszuarbeiten und dabei jeden unnötigen Formalismus zu vermeiden, soll der Aufbau des zu entwickelnden Materialmodells in diesem Abschnitt nur in einer eindimensionalen Form, d.h. als Relation zwischen Dehnungsprozessen $\varepsilon(t)$ und Spannungsprozessen $\sigma(t)$ beschrieben werden.

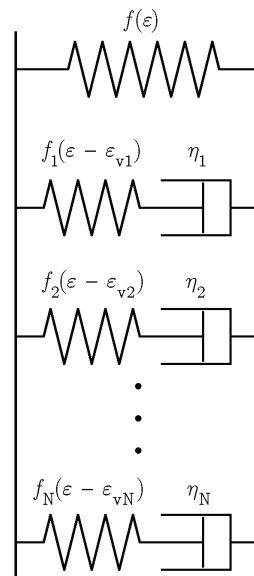


Bild 11: Prinzipieller Aufbau des Materialmodells

In sehr vielen (wenn auch nicht in allen) Fällen kann es sehr nützlich sein, die Konstruktion einer Materialtheorie als Rheologisches Modell zu veranschaulichen, d.h. als Netzwerk aus elastischen Federn, geschwindigkeitsabhängigen Dämpfern und (im Bedarfsfall) geschwindigkeitsunabhängigen Reibelementen. Eine Prinzipskizze des hier verwendeten Modells der Viskoelastizität zeigt Bild 11.

Das Materialmodell besteht aus mehreren Teilen. Zunächst denkt man sich den Spannungszustand in eine Gleichgewichtsspannung und eine Überspannung zerlegt:

$$\sigma = \sigma_{eq} + \sigma_{ov} \quad (1)$$

Die Gleichgewichtsspannung σ_{eq} (equilibrium stress) ist den inneren Gleichgewichtszuständen zugeordnet, während die Überspannung σ_{ov} (overstress) jede Abweichung von Gleichgewichtszuständen kennzeichnet. Geht man von der (selbstverständlichen) Annahme aus, daß ein abgeschlossenes System im Verlauf der Zeit einem Gleichgewichtszustand zustrebt, so geht die Gleichgewichtsspannung in einem solchen Übergang grundsätzlich gegen Null.

Eine weitere Annahme, die nicht notwendig aber oft nützlich ist, ist die Zerlegung der Deformation in elastische und inelastische Anteile. Im Fall der Viskoelastizität nach Bild 11 gibt es mehrere solcher Zerlegungen:

$$\varepsilon = \varepsilon_{ek} + \varepsilon_{vk}, \quad k = 1, \dots, N \quad (2)$$

Die wesentlichen Eigenschaften des Modells nach Bild 11 werden durch nichtlinear-elastische Federn, also durch Materialfunktionen sowie durch nichtlineare Viskositäten, repräsentiert:

$$f(\varepsilon), f_k(\varepsilon), \eta_k(\bullet), \quad k = 1, \dots, N$$

Für die Viskositäten müssen noch zusätzliche Variablen und Evolutionsgleichungen eingeführt werden, um eine Berücksichtigung der Prozeßabhängigkeit des Relaxationsverhaltens zu ermöglichen (s.u.).

Unter Gesichtspunkten der Thermodynamik müssen die Materialfunktionen $f(\bullet), f_k(\bullet), \eta_k(\bullet)$ einschränkende Bedingungen genügen, die sich aus dem Dissipationspostulat (2. H.S) ergeben. Um diese Bedingungen zu gewinnen, stellt man eine Funktion für die Freie Energie auf, die bei isothermen Prozessen genau der Formänderungsenergie der elastischen Federn im Rheologischen Modell entspricht. Analog zu Gl. (1) ist die Freie Energie ebenfalls die Summe aus einem Gleichgewichts- und einem Nichtgleichgewichtsanteil:

$$\psi = \psi_{eq} + \psi_{ov} = \varphi(\varepsilon) + \sum_{k=1}^N \varphi_k(\varepsilon - \varepsilon_{vk}) \quad (3)$$

Die Energiefunktion ist dann in die Entropiegleichung einzusetzen, die für isotherme eindimensionale Prozesse durch

$$\sigma \dot{\varepsilon} - \rho \dot{\psi} \geq 0 \quad (4)$$

gegeben ist. Mit den Gleichungen (1) und (3) erhält man aus (4) die Ungleichung

$$\left[\sigma_{eq} - \rho \frac{d\varphi}{d\varepsilon} \right] \dot{\varepsilon} + \sum_{k=1}^N \left[\sigma_{ovk} - \rho \frac{d\varphi_k}{d\varepsilon} \right] \dot{\varepsilon} + \sum_{k=1}^N \rho \frac{d\varphi_k}{d\varepsilon} \dot{\varepsilon}_{vk} \geq 0, \quad (5)$$

die für alle denkbaren Deformations- und Spannungsprozesse erfüllt sein muß. Hinreichend dafür sind die Spannungsbeziehungen

$$\sigma_{eq} = f(\varepsilon) = \frac{d\varphi}{d\varepsilon}, \quad (6)$$

und

$$\sigma_{ovk} = f_k(\varepsilon - \varepsilon_{vk}) = \frac{d\varphi_k}{d\varepsilon}(\varepsilon - \varepsilon_{vk}) \quad (7)$$

sowie die dann verbleibende Dissipationsungleichung

$$\sum_{k=1}^N \sigma_{ovk} \dot{\varepsilon}_{vk} \geq 0. \quad (8)$$

Die restliche Dissipationsungleichung (8) wird durch Fließregeln der Form

$$\dot{\varepsilon}_{vk}(t) = \frac{1}{\eta_k} \sigma_{ovk} \quad (9)$$

identisch erfüllt; die Viskositäten müssen positiv sein:

$$\eta_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (10)$$

(Für den uninteressanten Fall, daß alle Viskositäten verschwinden, geht das Modell über in eine Elastizitätsbeziehung.) Für die Darstellung der prozeßabhängigen Viskositäten wird der folgende Ansatz gemacht:

$$\frac{1}{\eta_k} = \frac{1}{\mu_k} \left(\xi_k |\dot{\varepsilon}| + \frac{1}{\tau_k} \right), \quad k = 1, \dots, N, \quad (11)$$

$$\tau_k = \tau_{\max k} (1 - q) + \tau_{\min k} q, \quad (12)$$

$$\dot{q}(t) = \zeta |\dot{\varepsilon}| (1 - q) - \frac{1}{\tau_q} q, \quad (13)$$

$$q(0) = 0. \quad (13a)$$

Darin sind die Größen τ_k Relaxationszeiten, die nach Gl (12) von einer neu eingeführten Inneren Variablen q abhängen. Die Größen $\mu_k, \xi_k, \tau_{\max k}, \tau_{\min k}, \tau_q, \zeta$ sind Materialparameter.

Die Gleichungen (11), (12), (13) modellieren die Prozeßabhängigkeit der Viskosität in folgender Weise: Die Viskosität hat am Beginn eines Deformationsprozesses einen Anfangswert und wird bei fortlaufender Deformation kleiner. Bei konstanter Deformation während einer Haltezeit, deren Größenordnung durch den Parameter τ_q bestimmt wird, nimmt die Viskosität wieder zu und kehrt nach genügend langer Haltezeit zu ihrem Anfangswert zurück. Dadurch entsteht prinzipiell am Beginn eines Relaxationsprozesses ein sehr starker Spannungsabfall, der sich im weiteren Verlauf wesentlich schwächer fortsetzt (s. Bild 4).

5 Zur dreidimensionalen Materialmodellierung

Für eine dreidimensionale Formulierung des Materialmodells ist es notwendig, skalare Größen durch tensorwertige Variable zu ersetzen, die unter physikalischen und mathematisch-formalen Gründen geeignet sind. Diese Übertragung liefert die allgemeine Kontinuumsmechanik (s. dazu [3]). Das Ergebnis ist in [1] bzw. [2] ausführlich dargestellt und soll hier nicht behandelt werden. Nur ein paar wenige Anmerkungen zur Verallgemeinerung auf drei Dimensionen sollen genügen:

Die allgemeine Deformationsgeometrie wird durch den Green'schen Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad (14)$$

dargestellt, der auf dem Rechten Cauchy-Green Tensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (15)$$

basiert, und der prinzipiell an die Stelle der Gesamtdehnung ε tritt. Die additiven Zerlegungen der Gesamtdehnung ε werden ersetzt durch multiplikative Zerlegungen des Deformationsgradienten in elastische und viskose Anteile,

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}_{ek} \mathbf{F}_{vk}, \quad k=1, \dots, N, \quad (16)$$

von denen jede formal eine Zwischenkonfiguration definiert. Der Tensor der Gesamtverzerrung, der auf die jeweilige Zwischenkonfiguration bezogen ist, entsteht durch die Transformation

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_k = \hat{\mathbf{F}}_{vk}^T \mathbf{E} \mathbf{F}_{vk}^{-1} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{F}}_{ek}^T \hat{\mathbf{F}}_{ek} - \mathbf{1}) + \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}_{vk}^T \mathbf{F}_{vk}^{-1}). \quad (17)$$

Die auf die Zwischenkonfiguration bezogene Gesamtverzerrung zerlegt sich damit additiv in elastische und viskose Anteile:

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_k = \hat{\mathbf{\Gamma}}_{ek} + \hat{\mathbf{\Gamma}}_{vk}, \quad (18)$$

mit

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_{ek} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{F}}_{ek}^T \hat{\mathbf{F}}_{ek} - \mathbf{1}), \quad (19)$$

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_{vk} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}_{vk}^T \mathbf{F}_{vk}^{-1}). \quad (20)$$

Zur Bildung von Verzerrungsgeschwindigkeiten im Sinne einer Verallgemeinerung der Fließregeln (9) hat sich das Konzept der Oldroyd-Ableitungen gut bewährt (s. dazu [3] und [2]). Der Ansatz (3) für die Freie Energie ist zu ersetzen durch die Energiefunktion

$$\psi = \psi_{eq}(\mathbf{C}) + \sum_{k=1}^N \psi_{ovk}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_{ek}), \quad (21)$$

wobei speziell die Materialfunktionen

$$\rho_R \psi_{eq}(\mathbf{C}) = c_1 (I_C - 3) + c_2 (II_C - 3) + c_3 (I_C - 3)(II_C - 3) + c_4 (II_C - 3)^2 + c_5 (I_C - 3)^3 \quad (22)$$

und

$$\rho_R \psi_{ovk}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_{ek}) = 2\mu_k \text{tr}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_{ek}), \quad k=1, \dots, N, \quad (23)$$

gewählt wurden, die die Materialparameter c_j und μ_k enthalten. Die Größen I_C und II_C bezeichnen die ersten beiden Grundinvarianten des Rechten Cauchy-Green Tensors \mathbf{C} ($III_C = 1$).

Der auf die Referenzkonfiguration bezogene Spannungszustand (2. Piola-Kirchhoff Tensor) ist gegeben durch

$$\tilde{\mathbf{T}} = -p \mathbf{C}^{-1} + \tilde{\mathbf{S}}_{eq} + \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{S}}_{ovk}, \quad (24)$$

wobei p der hydrostatischen Druck ist, der aufgrund der Zwangsbedingung „Inkompressibilität“ durch den Deformationsprozeß nicht bestimmt ist. Die auf die einzelnen Zwischenkonfigurationen bezogenen Überspannungen sind gegeben durch

$$\hat{\mathbf{S}}_{ovk} = \mathbf{F}_{vk} \tilde{\mathbf{S}}_{ovk} \mathbf{F}_{vk}^T, \quad k=1, \dots, N \quad (25)$$

Für weitere Informationen wird auf die Literatur [1-3] verwiesen.

6 Modellrechnungen

Die Stoffparameter, die das skizzierte Materialmodell enthält, sind in den Gleichungen (11), (12), (13) und (22), (23) benannt. Insgesamt wurden 3 Terme für die Darstellung der Überspannung herangezogen ($N=3$). Daraus ergibt sich eine Liste von Materialparametern, deren identifizierte Zahlenwerte (s. dazu [1]) die Tabellen von Bild 12 angeben.

Gleichgewichtsspannung

| | |
|-------|-------------|
| c_1 | 0.14 [MPa] |
| c_2 | 0.69 [MPa] |
| c_3 | 0.40 [MPa] |
| c_4 | -0.65 [MPa] |
| c_5 | 0.02 [MPa] |

Überspannung

| | |
|-----------------|----------------|
| μ_1 | 0.3 [MPa] |
| ξ_1 | 2.0 [-] |
| $\tau_{\max 1}$ | 200.0 [s] |
| $\tau_{\min 1}$ | 10.0 [s] |
| μ_2 | 0.8 [MPa] |
| ξ_2 | 30.0 [-] |
| $\tau_{\max 2}$ | 200000.0 [s] |
| $\tau_{\min 2}$ | 200.0 [s] |
| μ_3 | 0.3 [MPa] |
| ξ_3 | 10.0 [-] |
| $\tau_{\max 3}$ | 20000.0 [s] |
| $\tau_{\min 3}$ | 20.0 [s] |
| ζ | 2.4 [-] |
| τ_q | 40000.0 [s] |
| ζ | 0.5 [-] |
| κ | 0.5 [-] |

Bild 12: Materialparameter

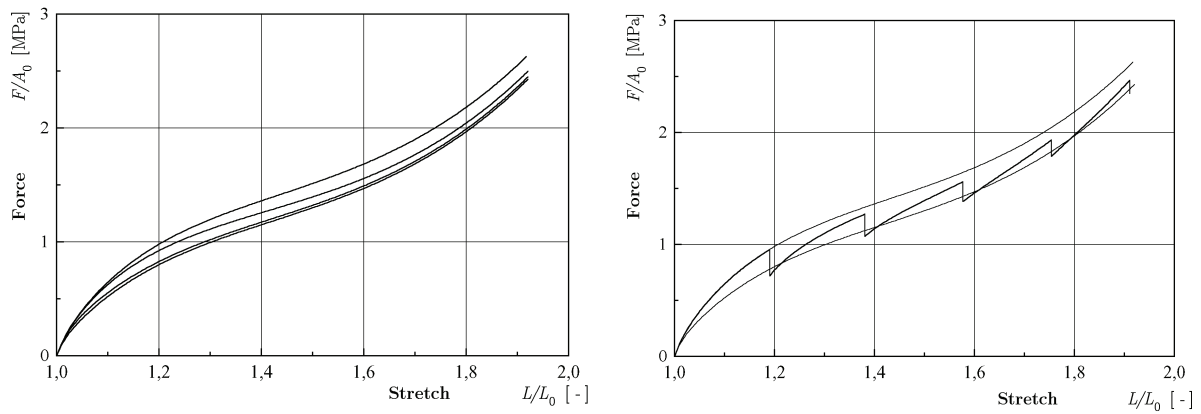


Bild 13: Monotoner Zug: Geschwindigkeitsabhängigkeit und Relaxation

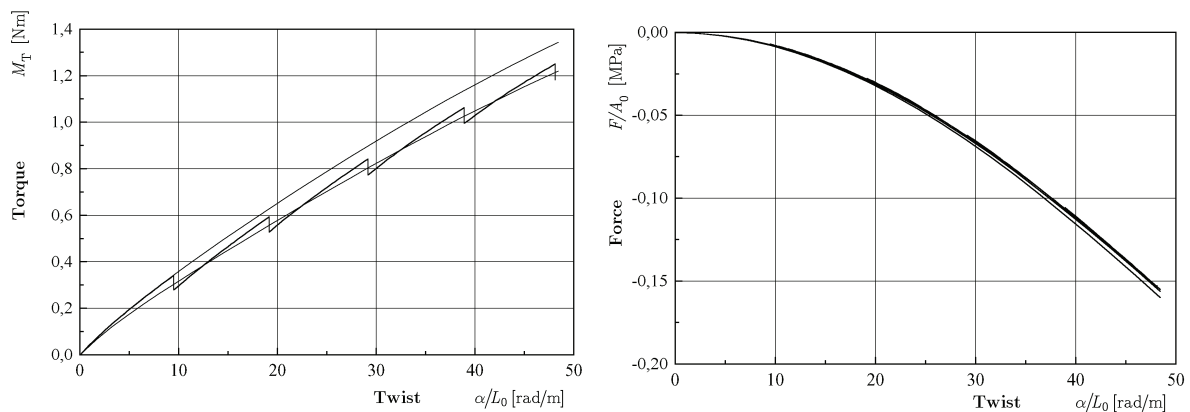


Bild 14: Torsionsversuche; Geschwindigkeitsabhängigkeit, Relaxation und Normalspannungseffekt

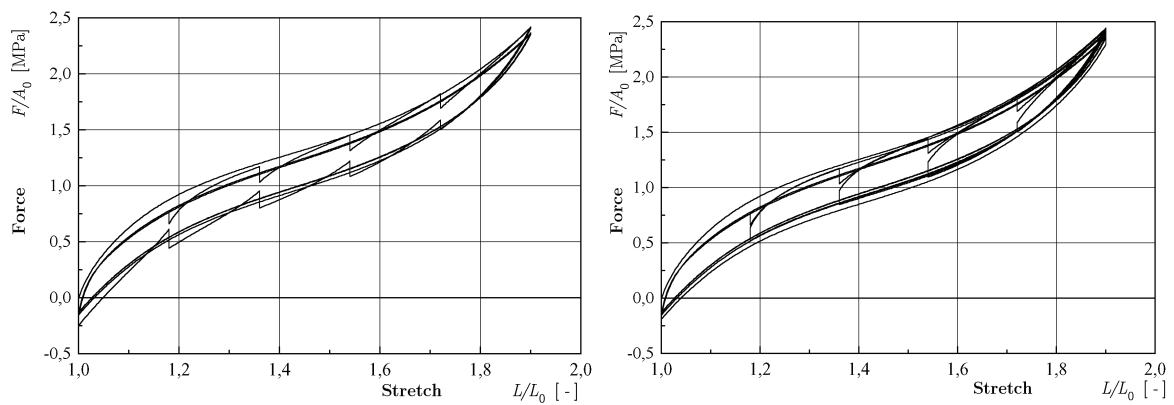


Bild 15: Zug - Zyklischer Relaxationsversuch ohne und mit Vorprozeß

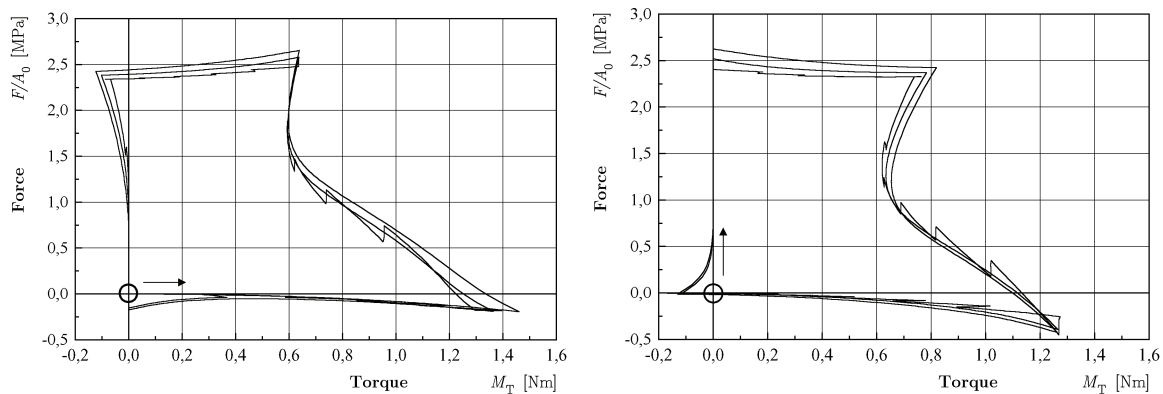


Bild 16: Zug und Torsion: Rechteckweg

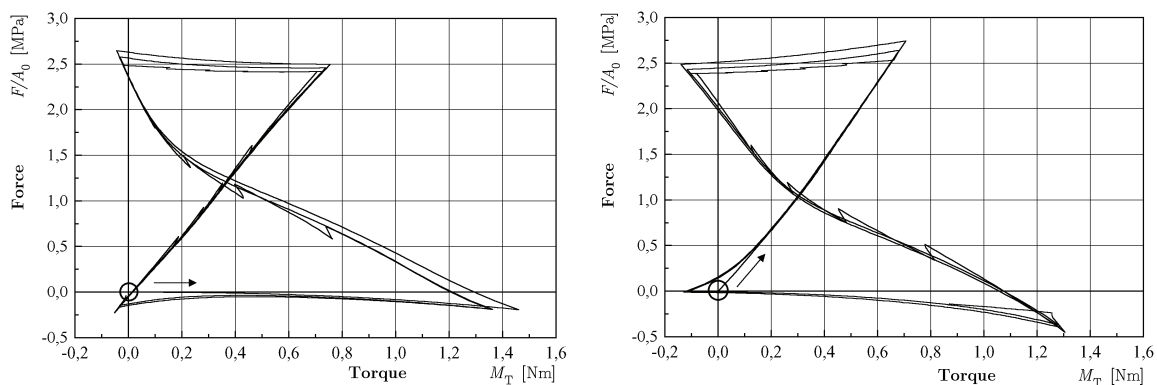


Bild 17: Zug und Torsion: Hourglass-Weg

Der Erfolg der Identifikation wird durch die Modellrechnungen veranschaulicht, deren Ergebnisse in den Bildern 13-17 dargestellt sind. Die durch das Materialmodell vorhergesagten Geschwindigkeitsabhängigkeiten und die Relaxationseigenschaften bei Zug (Bild 3) und Torsion (Bild 6) sind in den Bildern 13 und 14 wiedergegeben. Bild 15 zeigt den zyklischen Relaxationsprozeß (vgl. Bild 5). Man vergleiche beide Diagramme: Im Unterschied zum linken Bild wurde in der Berechnung zu Bild 15 rechts den Haltezeiten jeweils ein Deformationsprozeß vorgeschaltet, was im Vergleich zum linken Diagramm eine stärkere Annäherung der gegenüberliegenden Relaxationsendpunkte bewirkt. Dieser Effekt in der Simulation ist eine Folge der mit den Gleichungen (11), (12), (13) eingeführten prozeßabhängigen Viskositäten. Die Bilder 16 und 17 dokumentieren die Simulation der zweidimensionalen Experimente (s. Bild 7 und Bild 9).

7 Zusammenfassung

Gegenstand der Materialtheorie ist die Modellierung von Materialeigenschaften auf der Grundlage von allgemein gültigen Prinzipien und systematischen Methoden. Dazu sind zunächst Experimente an geeigneten Probekörpern durchzuführen. Bevor ein Materialmodell entworfen wird, ist es wichtig, die experimentellen Daten unter allgemeinen Gesichtspunkten einzuordnen. Vier Kategorien sind unterscheidbar: Hängt die Systemantwort nicht von der Geschwindigkeit der Eingangsprozesse ab, so können Hystereseeffekte wahrnehmbar sein oder auch nicht. Ist dagegen eine Geschwindigkeitsabhängigkeit der Systemantwort unübersehbar, so sind die Gleichgewichtskennlinien entscheidend: Die Gleichgewichtskennlinien können Hystereseeffekte aufweisen oder auch nicht. Diese 4 Möglichkeiten motivieren eine Materialmodellierung innerhalb von 4 unterschiedlichen Theorieklassen: *Elastizität*, *Plastizität*, *Viskoelastizität* und *Viskoplastizität*. Das Verhalten von kreiszylindrischen Probekörpern aus rußgefülltem Gummi wird in Zug- und Torsionsversuchen sowie in zweidimensionalen Zug/Druck-Experimenten untersucht. Aus den Messungen ergibt sich eine deutliche Geschwindigkeitsabhängigkeit, während die Hystereseeffekte der Gleichgewichtskennlinien sich als vernachlässigbar klein erweist. Daher kommt in diesem Fall für die Materialbeschreibung ein Modell der nichtlinearen Viskoelastizität in Frage. Die eindimensionale Formulierung der Materialgleichungen basiert auf einem rheologischen Modell, das aus nichtlinearen elastischen Feder- und Dämpfungselementen besteht. Insbesondere

werden die nichtlinearen Viskositäten als prozeßabhängig eingeführt. Das ermöglicht nicht nur die Berücksichtigung der nichtlinearen Geschwindigkeitsabhängigkeit, sondern auch eine Beschreibung der Beeinflussung des Relaxationsverhaltens durch den Verlauf des Deformationsprozesses vor der Haltezeit. Ausgehend von Materialparametern, deren Zahlenwerte aus den experimentellen Daten identifiziert sind, illustrieren numerische Simulationen der durchgeführten Versuche die physikalische Bedeutung der Materialgleichungen.

8 Literatur

- [1] SEDLAN, K.: Viskoelastisches Materialverhalten von Elastomerwerkstoffen: Experimentelle Untersuchung und Modellbildung. Dissertation; Bericht 2/2001 des Instituts für Mechanik, Kassel.
- [2] HAUPT, P.; SEDLAN, K.: Viscoplasticity of Elastomeric Materials: Experimental Facts and Constitutive Modelling. *Archive of Applied Mechanics* **71** [2001], 89-109.
- [3] HAUPT, P.: Continuum Mechanics and Theory of Materials. 2nd Edition Springer-Verlag Berlin 2002

